СОЧЕТАНИЯ

Задача1 . В классе 25 учеников. Сколькими способами можно выбрать двух из них для дежурства на вечере?

<u>Решение:</u> *Первого ученика можно выбрать 25 способами, второго, независимо от выбора первого,-24 способами. При этом каждая пара учитывается дважды. Поэтому ответ:* $25 \cdot 24 : 2 = 300$ способов.

Предположим теперь, что нам нужно выбрать для дежурства $\boldsymbol{к}$ человек, а в классе учится $\boldsymbol{n}$ человек. Количество способов, которыми это можно сделать, называется <u>*числом сочетаний из $\boldsymbol{n}$ элементов по $\boldsymbol{к}$ элементов*</u> и обозначается C_n^k.

Так, например: $\mathrm{C}_2^1 = 2$; $\mathrm{C}_3^2 = 3$; $C_n^1 = n$; $C_n^n = 1$; $C_n^0 = 1$.

Итак, нам надо выяснить, сколько подмножеств, содержащих $\boldsymbol{к}$ элементов, в множестве $\boldsymbol{N}$ с $\boldsymbol{n}$ элементами. Выбор подмножеств можно представить так. Элементы множества $\boldsymbol{N}$ сложим в мешок, а затем запустим в мешок руку и вытащим подмножество. Все $\boldsymbol{к}$ элементов вытаскиваем сразу и никакого порядка для них установить нельзя.
Можно рассмотреть наши действия на примере множества букв, состоящего из 4 элементов: ***а, б, в, г***.

$\mathrm{C}_4^0 = 1$ подмножество пусто

а	б	в	г

$\mathrm{C}_4^1 = 4$ подмножество из одного элемента

а	а	а	б	б	в
б	в	г	в	г	г

$\mathrm{C}_4^2 = 6$ подмножеств из 2 элементов

а	а	а	б
б	б	в	в
в	г	г	г

$\mathrm{C}_4^3 = 4$ подмножеств из 3 элементов

а	б	в	г

$\mathrm{C}_4^4 = 1$ подмножество из 4 элементов

Всего имеется $2^4 = 16$ подмножеств.

Найдем формулу для вычисления числа сочетаний.

Задача 2. Сколькими способами можно выбрать команду из трёх человек в классе с 30 учащимися?

<u>Решение:</u> *Первого ученика можно выбрать 30 способами, второго-29 способами, третьего-28 способами. Таким образом, получаем* $30 \cdot 29 \cdot 28$ *вариантов. Однако каждая команда при этом учтена несколько раз: поскольку число перестановок из трёх элементов равно 3!, то каждая команда учтена ровно 3!=6 раз. Поэтому*
$\mathrm{C}_{30}^3 = (30 \cdot 29 \cdot 28) : 3!$.

Аналогично может быть получена формула для произвольных сочетаний из $\boldsymbol{n}$ по $\boldsymbol{к}$: $\boxed{C_n^k = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{k!}}$

Упражнения

1. Сколькими способами можно выбрать 3 краски из имеющихся 5 различных красок, если цвета в тройках не повторяются?
2. На плоскости отмечено 10 точек так, что никакие три из них не лежат на одной прямой. Сколько существует треугольников с вершинами в этих точках?
3. Сколькими способами можно выбрать из 12 человек 9 представителей на конкурс чтецов?

   Имеет смысл рассмотреть следующее свойство.

   Пусть есть $\boldsymbol{n}$ человек, из которых нужно выбрать $\boldsymbol{к}$ представителей на конкурс. Заметим, что выбор $\boldsymbol{к}$ представителей равносилен выбору $\boldsymbol{n-k}$ человек, не участвующих в конкурсе. Поэтому

   $$\boxed{C_n^k = C_n^{n-k}}$$

4. Некоторый комитет состоим из 12 человек. Минимальный кворум для принятия решения должен насчитывать 8 человек.
   1)Сколькими способами может быть достигнут минимальный кворум?
   2)Сколькими способами может быть достигнут хоть какой-либо кворум?
5. У 6 взрослых и 11 детей обнаружены признаки инфекционного заболевания. Чтобы проверить заболевание, следует взять выборочный анализ у 2 взрослых и 3 детей. Сколькими способами это можно сделать?
6. В лаборатории находятся 8 белых и 6 коричневых кроликов. Найдите число способов выбора 5 кроликов из клетки, если 3 из них должны быть белыми, а 2 коричневыми?
7. В генетическом эксперименте 4 белых, 7 красных и 5 розовых цветков гороха взяты из имеющихся 10 белых, 10 розовых и 10 красных цветков. Сколькими способами это можно сделать?
8. В шахматном кружке занимаются две девочки и 7 мальчиков. Для участия в соревнованиях необходимо выставить команду из 4 человек, в которую обязательно должна входить хотя бы одна девочка. Сколькими способами это можно сделать?

9. Три юноши и семь девушек отправляются в поход на двух лодках по реке. Сколькими способами их можно разместить в двух лодках поровну, чтобы в каждой был хотя бы один юноша?
10. Сколькими способами можно разбить 10 человек на две баскетбольные команды по 5 человек в каждой?
11. Для участия в лотерее «Спортлото» нужно указать шесть номеров из имеющихся на карточке 45 номеров. Сколькими способами это можно сделать?
12. У одного человека 7 книг по математике, а у другого- 9 книг. Сколькими способами они могут обменять три книги одного на три книги другого?
13. Труппа состоит из 20 артистов. Сколькими способами это можно выбирать из нее в течение двух вечеров по 6 человек для участия в спектаклях так, чтобы составы не повторялись?
14. В школьной лотерее на 50 билетов разыгрывается 8 выигрышей. Первый пришедший к урне ученик выбирает из урны 5 билетов. Сколькими способами он может их вынуть, чтобы среди них оказалось ровно два выигрышных?
15. Из 10 роз и 8 георгинов нужно составить букет, содержащий 2 розы и 3 георгина. Сколько можно составить различных букетов?